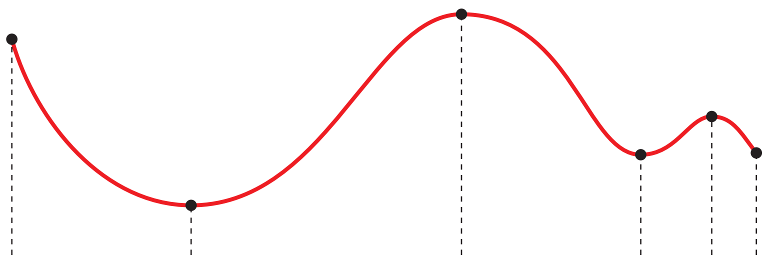
10 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

REFLEXIONA Y RESUELVE

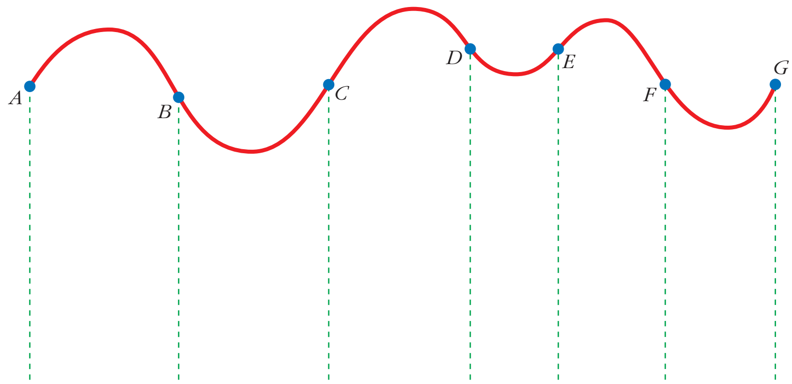
Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

- **Analiza la curva siguiente:**



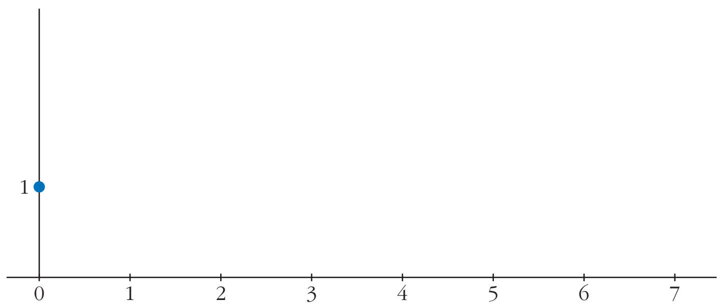
Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

- **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



■ **Dibuja la gráfica de una función, f, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



1. **Halla las rectas tangentes a la curva:**

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

2. **Halla las rectas tangentes a la circunferencia:**

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

1. **Dada la función** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, **averigua:**

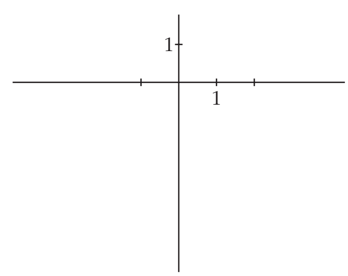
a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

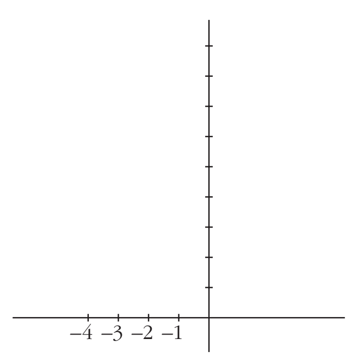
2. **Comprueba que la función** $y = x^3/(x - 2)^2$ **tiene solo dos puntos singulares, en** $x = 0$ **y en** $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

3. **a)** **Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) **Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.**





1. **Estudia la curvatura de esta función:**

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

2. **Estudia la curvatura de la función siguiente:**

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

1. **Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.**

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

1. **Calcula, aplicando L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x\,(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{sen\, x}$

2. **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

3. **Aplica L'Hôpital:**

$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x)^{1/x}$$

4. **Calcula:**

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$$

1. **a) Explica por qué $y = \text{sen}\, x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$.**

b) ¿En qué punto se verifica la tesis del teorema de Rolle?

2. **Demuestra que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. **Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función:**

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ en } [-2, -1]$$

Calcula el valor correspondiente a c.

4. **Repite el ejercicio anterior para la función:**

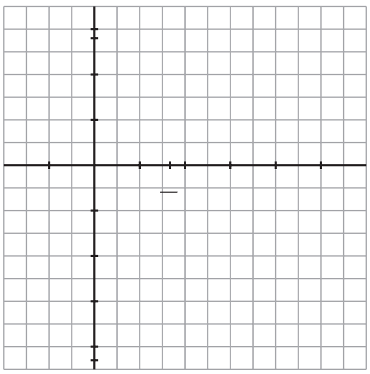
$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

5. **Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b. (Hazlo por reducción al absurdo: empieza suponiendo que hay dos raíces en ese intervalo).**

6. **Calcula p, m y n para que**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ mx + n & \text{si } \ \ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$. ¿Dónde cumple la tesis? Represéntala.



1. **Demuestra que: "Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$".**

2. **Demuestra que: "Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo en x_0".**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:**

a) $y = ln\,(tg\ 2x)$ en $x = \frac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{sen\ 5x}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

d) $y = (x^2 + 1)^{sen\ x}$ en $x = 0$

s2 **Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

3 **Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:**

a) $y = x \ln x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\ 2x$

4 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

5 **Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.**

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

s6 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$

c) $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$

e) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

f) $y = e^x (x - 1)$

s7 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ e) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

s8 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x - 2)^4$

d) $y = x\, e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = ln(x + 1)$

9 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$

b) $y = 2 + (x - 1)^4$

c) $y = 3 - (x - 1)^6$

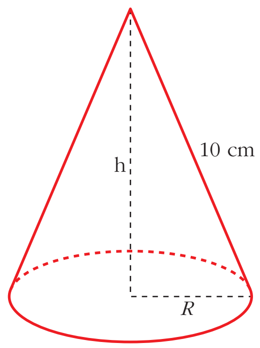
d) $y = -3 + 2(x - 1)^5$

Problemas de optimización

10 **Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

11 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**

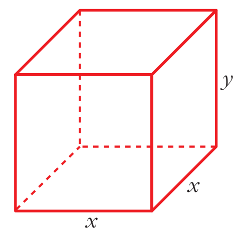
☛ $V = \frac{\pi}{3} R^2 h$



Por tanto, el radio de la base será:

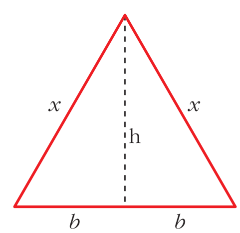
$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \to \quad R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

s12 **Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.**



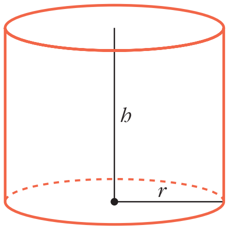
s13 **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**

☛ ***Llama 2b a la base del triángulo.***

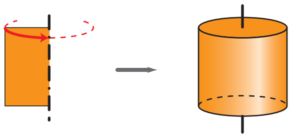


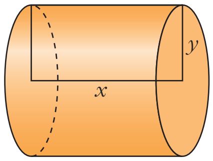
s14 **Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.**

☛ $A_T = 2\pi R h + 2\pi R^2$; $V = \pi R^2 h$



15 **Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.**





Regla de L'Hôpital

s16 **Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x}}{1 - \cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\text{tg } x - 8}{\sec x + 10}$

Coeficientes de una función

17 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

s18 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a, b, c y d.**

19 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

s20 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = –1$ y tiene un punto de inflexión en (2, 1). Calcula a, b y c.**

21 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

s22 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

PARA RESOLVER

23 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.**

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

f'

24 **Dada la parábola $y = 3x^2$, encuentra un punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48).**

s25 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

26 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por $y = |x^2 + 2x - 3|$.**

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

27 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

s28 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?**

s29 **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.**

s30 **Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

31 **Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8).**

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

Página 306

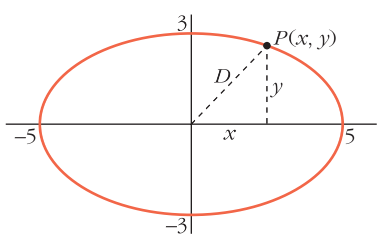
32 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

☛ ***Recuerda que el ángulo de dos rectas se puede calcular así:*** $tg\ \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$, ***donde*** m_1 ***y*** m_2 ***son las pendientes de las rectas.***

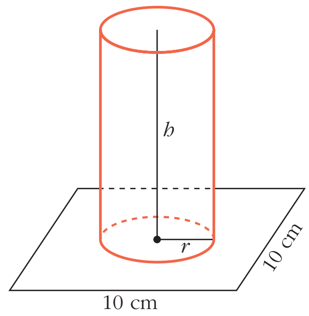
s33 **El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación:** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.



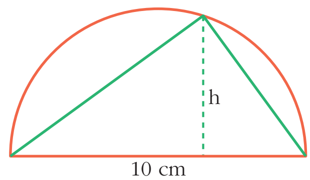
s34 **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?**

☛ ***Busca el máximo absoluto en los extremos del intervalo de definición.***



s35 **Dada la función $f: [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

s36 **Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10 cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?**

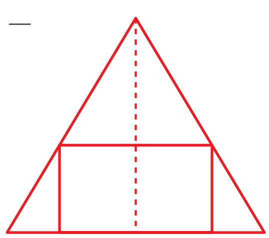


37 **El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t - 2)^2$, $0 \le t \le 4,5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.**

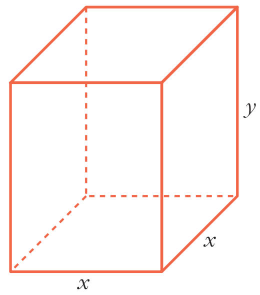
s38 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

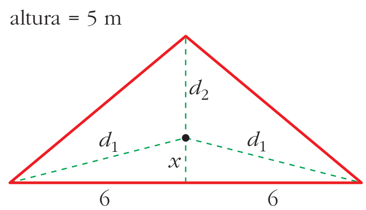


39 **Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.**



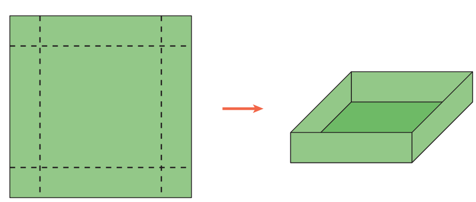
40 **Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.**

Encuentra un punto *P* sobre la altura tal que la suma de distancias de *P* a los tres vértices sea mínima.



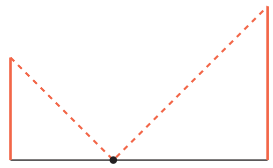
41 **Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

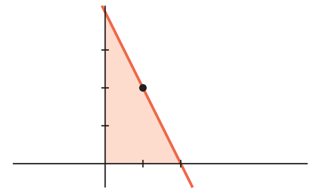


42 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos.**

¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



43 **De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.**



44 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(tg\, x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (tg\, x)^{\cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - sen\, 2x)^{cotg\, 3x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x}$

45 **Calcula los siguientes límites:**

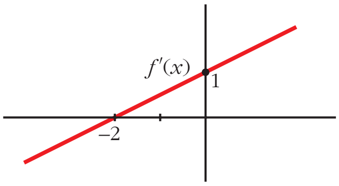
a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\dfrac{1}{\cos 2x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - (4x/\pi)} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

CUESTIONES TEÓRICAS

46 **La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f', de una función f.**



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene punto de inflexión?

47 **Halla una función f cuya gráfica no sea una recta y en la que existan infinitos puntos en los que la recta tangente a su gráfica sea $y = 1$.**

48 **Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a?**

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

s49 **Un polinomio de 3.er grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$.**

Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.

s50 **a) Si es posible, dibuja la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

s51 **¿Puede existir una función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ continua en todos los puntos de I, que tenga un máximo local en el punto $x = 3$, pero que no sea derivable en $x = 3$?**

52 **Si $y = f(x)$ es una función creciente en $x = a$, ¿se puede asegurar que $g(x) = -f(x)$ es decreciente en $x = a$?**

53 **Si $f''(x) > 0$ para todo x del dominio de f, ¿qué podemos decir de la gráfica de f?**

s54 **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

s55 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?:**

a) f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

56 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ para el que $f'(c) = 0$.**

s57 **Se tiene la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

58 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

s59 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]?**

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

60 **Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$.**

¿Dónde cumple la tesis?

$\sqrt{3}$

61 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable.**

¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.

62 **La función $f(x) = |\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1.**

¿Cumplirá el teorema de Rolle?

Página 308

63 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6].

¿Dónde cumple la tesis?

64 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo [–1, 1]. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.**

65 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en [0, 5] existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

66 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4].

¿En qué punto se cumple la tesis?

67 **Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema, que la función $f(x) = sen(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo [–1, 1]? Justifica la respuesta.**

PARA PROFUNDIZAR

68 **Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.**

69 **Sea $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, con a y b números positivos. Demuestra que el valor mínimo de f en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.**

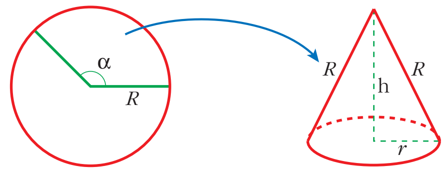
70 **Calcula:**

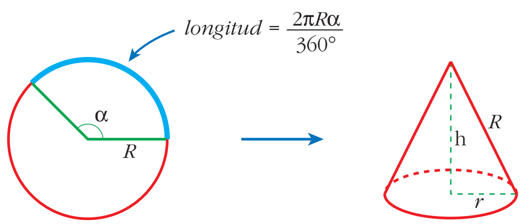
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

71 **Calcula a y b para que se verifique** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$

72 **Si de un disco metálico quitamos un sector circular, podemos construir un vaso cónico. Determina el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.**



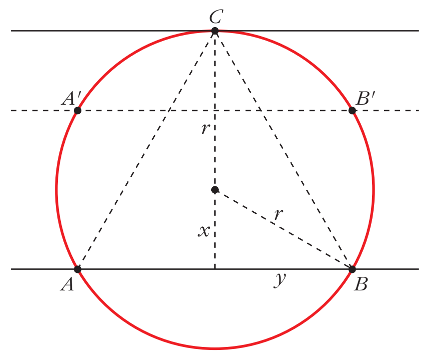


73 **Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm, y uniendo sus extremos se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.**

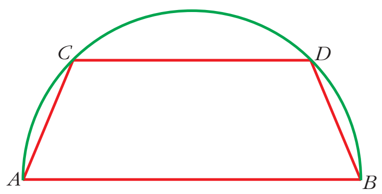
☛ ***¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos? ¿Y el minutero? ¿Cuál es el ángulo que forman entre las dos en t minutos?***

74 **Comprueba que, en la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{k}{x}$, se tiene que el punto c, que cumple $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es, precisamente, la media geométrica de a y b, $c = \sqrt{ab}$.**

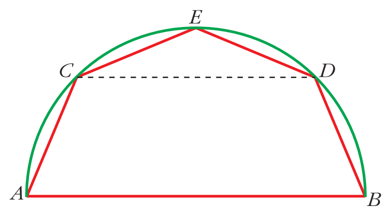
75 **En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos, así, un triángulo ABC cuya área queremos que sea la mayor posible. Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser $\frac{3}{2}$ del radio.**



76 **En una semicircunferencia de diámetro *AB* = 2*r* se traza una cuerda *CD* paralela a *AB*. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio *ABDC* sea máxima?**



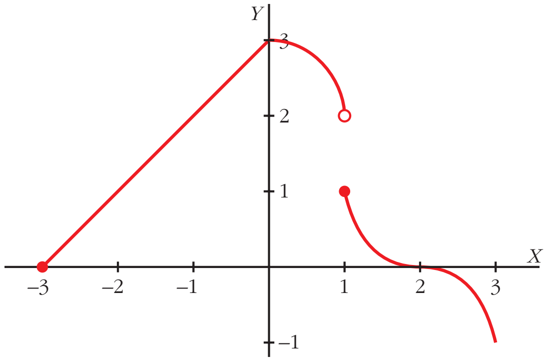
77 **En la figura del problema anterior, llamamos *E* al punto medio del arco *CD* y dibujamos el pentágono *ACEDB* que ves a continuación:**



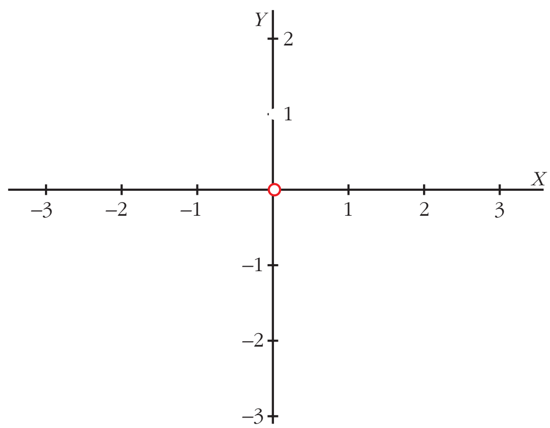
a) Calcula la longitud de la cuerda *CD* para que el área del pentágono sea máxima.

b) Calcula, también, el valor del área máxima del pentágono.

s78 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)$ definida en $[-3, 3]$ cuya gráfica es la siguiente:**



Dibuja razonadamente la gráfica de $f'(x)$.


Y
2
1
X
–3
–2
–1
1
2
3
–1
–2
–3

AUTOEVALUACIÓN

1. **Halla un punto de la gráfica $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a $y = 3x + 8$.**

2. **Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, estudia si tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión.**

3. **Estudia el crecimiento de la función:**

$$f(x) = e^x (cos\ x + sen\ x)$$

y determina los máximos y los mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$**.**

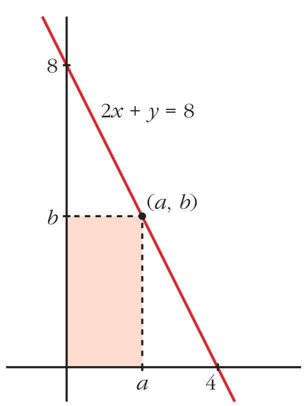
4. **a) Estudia la curvatura de la siguiente función:** $f(x) = x^2\ ln\ x$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

5. De todos los rectángulos de área 100 dm^2, halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.

6. **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

7. **Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0)$, $(0, 0)$, (a, b) y $(0, b)$. Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.**



8. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - (1/3)x^3}{x - tg\, x}$.

9. Calcula el valor de k para que la expresión $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}$ sea igual a e^4.

10. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, halla a y b para que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas a OX.

11. **La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica $f(-2) = f(2)$. Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.**